האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בתורת הקבוצות (80200)
מועד א' תשס"ד

שם המורה: פרופ' ב. ווייס **משך הבחינה: שעתיים**

מס' סטודנט: _____
מס' מחברת: ____

חלק א: ענה של שתי השאלות הבאות. יש לסמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה.
(כל שאלה 20 נק')

1. במרוצת ההוכחה של משפט קנטור-ברנשטיין מטפלים במקרה פרטי שבו יש העתקה חח"ע f מקבוצה X לתוך X, שאיננה על, ומנסים לבנות העתקה חח"ע ועל בין X ל- Y כאשר Y קבוצה בין X ל- $f(X)$, $f(X) \subset Y \subset X$. מגדירים באינדוקציה $A_0 = f(X), \ldots, A_{n+1} = f(A_n), \ldots$ ו- $A_\omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

ציינו אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות:

i. תמיד A_ω היא הקבוצה הריקה. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

ii. f מעתיקה את A_ω על A_ω. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

iii. הקבוצות $\{A_n \setminus A_{n+1} : n \geq 0\}$ זרות. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

iv. $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n \setminus A_{n+1}) = X \setminus A_0$. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

v. $f \mid A_\omega$ היא חח"ע. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

2. תוך כדי ההוכחה שאקסיומת הסדר הטוב גוררת את הלמה של צורן משתמשים במספר טענות ביניים על קבוצות סדורות חלקית וסודרים.
צייין אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות:

i. לכל קבוצה סדורה חלקית $(X, <)$ יש סודר α והעתקה $f : X \to \alpha$, שהיא חח"ע ועל ושומרת סדר. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

ii. אם β סודר ו- $B \subset \beta$ (הכלה ממש) אזי B שקולה לרישא של איבר ב β. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

המשך ←

iii. בקבוצה $(X,<)$ הסדורה חלקית ומקיימת את הנחת הלמה של צורן, לכל שרשרת יש חסם עליון. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

iv. אם α סודר ו- $C \subseteq \alpha$ שרשרת אזי יש ל- C חסם עליון ב- α.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

v. $(X,<)$ קבוצה סדורה חלקית המקיימת את ההנחות של הלמה של צורן, $|X| > 1$ אז או $\{\varnothing\} \in X$ או $\varnothing \in X$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

חלק ב: ענה על 5 שאלות מתוך 6. יש לסמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה

(כל שאלה 4 נק')

1. תהיינה X ו- Y שתי קבוצות. אזי $X \times Y \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(X \cup Y))$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

2. תהי $(X_n : n \geq 1)$ סידרה אינסופית של קבוצות כך שלכל $n \in N$ $|X_n| = \aleph_0$, אזי $\left|\underset{n\geq 1}{\times} X_n\right| = \aleph$ (המכפלה הקרטזית האינסופית) וכאשר $\aleph$ מונה של הרצף.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

3. יהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה ליניארית ותהי $f : X \to X$ פונקציה חח"ע מ- X ל- X השומרת סדר, אזי לכל $x \in X$ מתקיים $f(x) \geq x$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

4. יהי α סודר אזי $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$. ☐ נכון; ☐ לא נכון.

5. יהי α, β סודרים כך ש- $|\alpha| = |\beta| = \aleph_0$. תהי α^β החזקה שלהם כסודרים, אזי $|\alpha^\beta| = \aleph_0$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

6. יהיו $\{c_a\}_{a\in A}, \{d_a\}_{a\in A}$ משפחות של קרדינלים כך ש- $1 < |A|$ ולכל $a \in A$ $c_a > 1$ וגם $d_a \geq c_a$ אזי $\sum_{a\in A} c_a < \prod_{a\in A} d_a$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

המשך ←

חלק ג: ענה של 5 שאלות מתוך 6. סמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה. (כ"א 8 נק')

1. יהיו X,Y קבוצות כאשר $X=\varnothing$ אזי $Y^X = ?$:
   - i. $\varnothing$.
   - ii. $\{\varnothing\}$.
   - iii. Y.
   - iv. אף אחת מהאפשרויות הנ"ל אינה נכונה.

2. תהי $f: X \to X$ פונקציה מ- X ל- X. לכל $n \in N$ נסמן $f^{(n)} = f \cdots f$ כאשר בצד ימין f מופיע n פעמים. כמו כן נניח שלכל $x \in X$ קיים $n(x) \in N$ כך ש- $f^{n(x)}(x) = x$. קבע מהי הטענה הנכונה:
   - i. f היא חח"ע אך לא תמיד על.
   - ii. f היא על אך לא תמיד חח"ע.
   - iii. f היא חח"ע ועל.
   - iv. f יכולה להיות על או חח"ע או שניהם.

3. הקבוצה N^N עם יחס הסדר הלקסיקוגרפי מקימת:
   - i. סדורה חלקית אבל לא לינארית.
   - ii. סדורה היטב אבל לא בת-מנייה.
   - iii. סדורה לינארית אבל לא היטב.
   - iv. סדורה חלקית בת-מנייה.

4. לאיזה מהסודרים הבאים שווה הסודר $1990 + 25 \cdot \omega^9 + \omega \cdot 25 + 12 \cdot \omega$?
   - i. ω^9.
   - ii. $\omega^9 + \omega \cdot 26$.
   - iii. $\omega^9 + \omega \cdot 37$.
   - iv. $25 \cdot \omega^9$.

5. יהיו α, β סודרים כאשר $\alpha \neq \varnothing, \beta \neq \varnothing$, מהי הטענה הנכונה תמיד:
   - i. $\alpha \times \beta > \beta$.
   - ii. $\alpha^\beta > \beta$.
   - iii. $\alpha + \beta > \alpha$.
   - iv. $\alpha \times \beta > \alpha$.

6. יהיו $A, B \subset X$, נסמן A^c המשלים של A ב- X אזי $A \Delta B = ?$.
   - i. $(A \cup B) \setminus (A \cap B^c)$.
   - ii. $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.
   - iii. $A^c \Delta B$.
   - iv. $(A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)$

בהצלחה!